Е. К. Мышкина

Сибирский федеральный университет,

elfifenok@mail.ru

О СТЕПЕННЫХ СУММАХ КОРНЕЙ НЕКОТОРЫХ ВИДОВ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\begin{cases} (1-a_{11}z_1)^{m_{11}}\cdot\ldots\cdot(1-a_{1n}z_n)^{m_{1n}}+Q_1(z)=0,\\ (1-a_{21}z_1)^{m_{21}}\cdot\ldots\cdot(1-a_{2n}z_n)^{m_{2n}}+Q_2(z)=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (1-a_{n1}z_1)^{m_{n1}}\cdot\ldots\cdot(1-a_{nn}z_n)^{m_{nn}}+Q_n(z)=0, \end{cases} \tag{1}$$

где m_{ij} — натуральные числа, $a_{ij}\neq 0$ — комплексные числа, различные при каждом фиксированном j, $Q_i(z)$ — целые функции.

Обозначим через $q_i(z_1,\ldots,z_n)$ выражение вида

$$q_i(z_1,\ldots,z_n)=(1-a_{i1}z_1)^{m_{i1}}\cdot\ldots\cdot(1-a_{in}z_n)^{m_{in}},\quad i=\overline{1,n}.$$

Система уравнений $q_i(z)=0,\quad i=\overline{1,n}$, имеет $n!$ изолированных корней, и эти корни равны $a_J=(\frac{1}{a_{1i_1}},\ldots,\frac{1}{a_{ni_n}})$, где $J=(i_1,\ldots,i_n)$ — мультииндекс, являющийся перестановкой $(1,\ldots,n)$.

Предположим теперь, что $Q_i(z)$ — многочлены вида

$$Q_i(z)=z_1\cdots z_n\sum_{|\alpha||\geqslant 0}C^i_\alpha z^\alpha,\quad i=\overline{1,n}, \tag{2}$$

где α — мультииндекс, $z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{\alpha_n}$, и $\deg_{z_j}Q_i\leqslant m_{ij}$, $i,j=$ $=\overline{1,n}$.

Рассмотрим функции

$$F_i(z)=q_i(z)+Q_i(z),\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Делая замену $z_j = 1/w_j$, $j = \overline{1,n}$, получаем

$$F_i\left(\frac{1}{w_1},\dots\frac{1}{w_n}\right) = \left(\frac{1}{w_1}\right)^{m_{i1}}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1}{w_n}\right)^{m_{in}}\cdot\left(\widetilde{q}_i(w)+\widetilde{Q}_i(w)\right),$$

где функции $\widetilde{q}_i(w) = (w_1 - a_{i1})^{m_{i1}}\cdot\ldots\cdot(w_n - a_{in})^{m_{in}}$, а многочлены $\widetilde{Q}_i(w) = w^{m_{i1}}\cdot\ldots\cdot w^{m_{in}}\cdot Q_i\left(\frac{1}{w_1},\dots\frac{1}{w_n}\right)$, причем $\deg_{w_j}\widetilde{Q}_i < m_{ij}$, $i,j=\overline{1,n}$.

Обозначим через $z_j = (z_{j1},\dots,z_{jn})$, $j=1,\dots p$, корни системы (1) с функциями Q_i вида (3), не лежащими на координатных плоскостях. Этих корней конечное число.

Теорема. *Для системы* (1) *с многочленами* Q_j *вида* (2) *справедливы равенства*

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{z_{j1}^{\gamma_1+1}\cdot z_{j2}^{\gamma_2+1}\cdots z_{jn}^{\gamma_n+1}} = \sum_{K\in\Re}(-1)^{||K||}\sum_J(-1)^{s(J)}\frac{1}{\beta(K,J)!}\times$$
$$\times\frac{\partial^{||\beta||}}{\partial w^{\beta}}\left[\widetilde{\Delta}\cdot w_1^{\gamma_1+1}\cdot\ldots\cdot w_n^{\gamma_n+1}\cdot\frac{\widetilde{Q}^K}{\widetilde{q}^{K+I}(J)}\right]_{w=\widetilde{a}_J},$$

где множество индексов $\Re = \{K=(k_1,\dots,k_n)|\quad \exists i:\gamma_i+2 > \|K\|,\quad i=\overline{1,n}\}$, $\widetilde{a}_J = (a_{1i_1},\dots,a_{ni_n})$, $(-1)^{s(J)}=1$, *когда* J *— четная перестановка и* $(-1)^{s(J)}=-1$, *когда* J *— нечетная перестановка,* $\widetilde{q}^{K+I}(J) = \widetilde{q}_1^{k_1+1}[i_1]\cdot\ldots\cdot\widetilde{q}_n^{k_n+1}[i_n]$, *а* $\widetilde{q}_j[i_j]$ *— это произведение всех* $(w_1-a_{j1})^{m_{j1}}\cdot\ldots\cdot(w_n-a_{jn})^{m_{jn}}$ *кроме* $(w_{i_j} - a_{ji_j})^{m_{ji_j}}$, $\beta(K,J) = (m_{1i_1}\cdot(k_{i_1}+1)-1,\dots,m_{ni_n}\cdot(k_{i_n}+1)-1)$, $\beta(K,J)! = \prod_j(m_{ji_j}\cdot(k_{i_j}+1)-1)!$,

$$\frac{\partial^{||\beta||}}{\partial w^{\beta}} = \frac{\partial^{m_{1i_1}\cdot(k_{i_1}+1)-1+\ldots+m_{ni_n}\cdot(k_{i_n}+1)-1}}{\partial w_1^{m_{1i_1}\cdot(k_{i1}+1)-1}\cdot\ldots\cdot\partial w_n^{m_{ni_n}\cdot(k_{in}+1)-1}}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-01-00007-а).